NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4110 Matematikk 3 - Regneverksted**

Faglig kontakt under eksamen:

Tlf:

Eksamensdato:

Eksamenstid (fra–til):

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Eksamensregning 19. november 2021

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 22

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 *Oppgave 4 Eksamen Kont2021*

La

$$U = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ der } s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Vis at nullvektoren ligger i U

(b) Vis at delmengden U er ett reelt underrom av $\mathbb{R}^3$

(c) Hva er dimensjonen til underrommet U?

Løsningsforslag (a) Det å vise at nullvektoren ligger i U er det samme som å løse systemet

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

for s og t i $\mathbb{R}$. Vi løser systemet ved å sette opp matriseligningen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og radredusere den utvidede matrisen

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Altså ser vi at

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

og dermed er nullvektoren i U.

(b) For å være et underrom av $\mathbb{R}^3$ må U oppfylle følgende tre betingelser

(i) Nullvektoren $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ligger i U.

(ii) For alle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i i U ligger også summen $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ i U.

(iii) For alle vektorer $\mathbf{u}$ i U og alle skalarer $c \in \mathbb{R}$ ligger også skalarproduktet $c\mathbf{u}$ i U.

For å spare oss for mye arbeid, så kan vi observere fra (a) at

$$\begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

dermed får vi

$$\begin{aligned}
U &= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \mathbf{u} = \begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} \text{ der } s,t \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R} \;\middle|\; \mathbf{u} = (s+1)\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + (t+2)\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} \text{ der } s,t \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R} \;\middle|\; \mathbf{u} = s'\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + t'\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} \text{ der } s',t' \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

altså er U lik utspenningen sp $\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} \right\}$, som vi vet er et underrom.

(c) U er utspent av to vektorer som er lineært uavhengige, så da er dimensjonen lik 2.

Oppgave 2 *Oppgave 7 Eksamen Kont2021*

La $\mathcal{M}_2$ være vektorrommet bestående av alle reelle 2×2–matriser, altså

$$\mathcal{M}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

og la $\mathcal{P}_3$ være vektorrommet bestående av polynomer av grad mindre enn eller lik 3.

(a) Vis at

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

er en basis for $\mathcal{M}_2$ (dette er standardbasisen for $\mathcal{M}_2$).

La $\mathcal{C} = (1, x, x^2, x^3)$ være standardbasisen for $\mathcal{P}_3$, og la $T\colon \mathcal{M}_2 \to \mathcal{P}_3$ være lineærtransformasjonen gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = 2a + (b-d)x - (a+c)x^2 + (a+b-c-d)x^3.$$

(b) Finn standardmatrisen A til lineærtransformasjonen T.

(c) Finn en basis for bildet til T og en basis for kjernen til T.

(d) Er T surjektiv? Er T injektiv?

Løsningsforslag.

(a) Ligningen

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

viser at hvert element i $\mathcal{M}_2$ kan skrives som en lineær kombinasjon av elementene i $\mathcal{B}$. Videre ser vi at den eneste måten en slik lineærkombinasjon kan bli nullmatrisen er hvis $a = b = c = d = 0$, så $\mathcal{B}$ er lineært uavhengig. Med andre ord danner $\mathcal{B}$ en basis for $\mathcal{M}_2$.

(b) For å finne standarmatrisen evaluerer vi T på hver basisvektor og finner koordinatvektoren. Vi har at

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2 - x^2 + x^3 = 2 \cdot 1 + 0 \cdot x + (-1) \cdot x^2 + 1 \cdot x^3,$$

så første kolonne i standarmatrisen blir

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tilsvarende utregning for de andre kolonne gir at standardmatrisen blir

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(c) Radreduserer vi matrisen vi fant i (b) får vi

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Siden vi har pivotelement i de tre første kolonnene betyr dette at en basis for bildet er gitt ved å anvende T på de tre første basisvektorene i $\mathcal{B}$. Dette gir oss basisen

$$(2 - x^2 + x^3, x - x^3, -x^2 - x^3).$$

vi har kun en kolonne uten pivotelement, så kjernen blir 1–dimensjonal. Nullrommet til A er utspent av vektoren

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dette gir oss at kjernen til T er utspennt av

$$0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Funksjonen T er verken surjektiv eller injektiv fordi kjernen ikke er null og bildet ikke er hele $\mathcal{P}_3$.

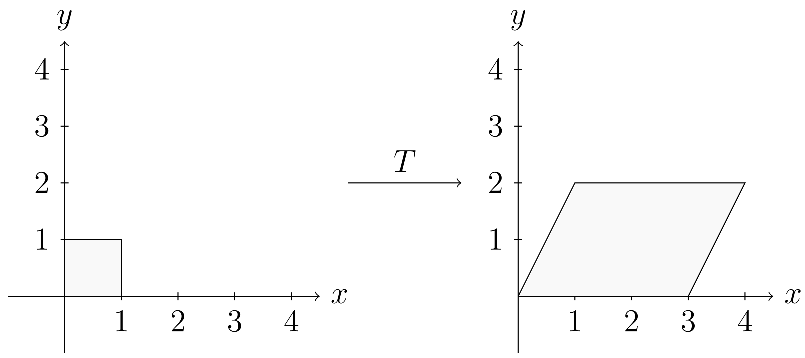
Oppgave 3 *Oppgave 3 Eksamen Kont2019*

En lineærtransformasjon $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbilder firkanten med hjørner i

$$(0,0),\ (1,0),\ (0,1) \text{ og } (1,1)$$

til parallellogrammet utspent av

$$\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$



Finn standardmatrisen $[T]$ til T og regn ut $T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$. Finn $\ker T$. Er T surjektiv?

Løsningsforslag

Vi kan velge T slik at $T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$ og $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ Da blir standardmatrisen

$$[T] = \left[T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) \,\middle|\, T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) \right] = \begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$$

Vi beregner

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = [T]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$$

Siden $\det([T]) = 6 \neq 0$, så er $[T]$ en inverterbar matrise, og dermed er T en inverterbar lineærtransformasjon. Da er nødvendigvis T injektiv, og $\ker(T) = 0$. Av samme grunn er T surjektiv.

Oppgave 4 *Oppgave 9 Eksamen Vår2021*

La $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{bmatrix}$ (varianter $(p, q) = (-2, 3), (-4, -3), (1, 6), (-5, -6)$)

a) Skisser fasediagrammet til differensialligningen $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$.

b) Finn alle løsninger av likningen $y'' - py' - qy = 0$.

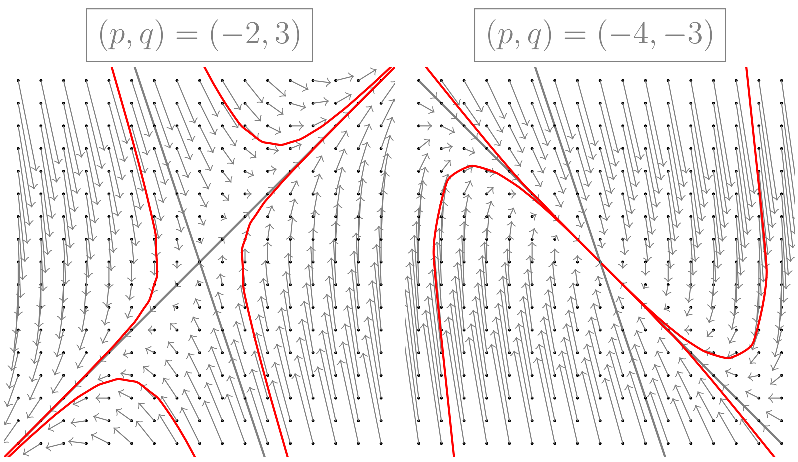
c) Finn en løsning av likningen $y'' - py' - qy = 2$, $y(0) = \left(\frac{p}{q}\right)^2$, $y'(0) = -\frac{p}{q}$.

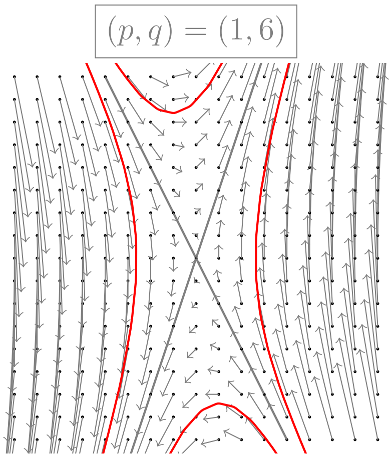
Løsningsforslag.

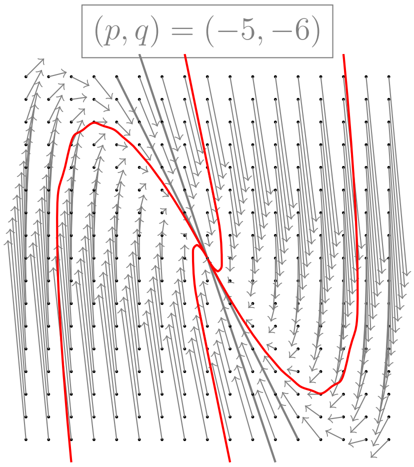
a) For å skissere fasediagrammet bør vi først finne egenverdiene og egenvektorene. Egenverdiene til A er røttene til $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - p\lambda - q$, som er lik $\frac{p \pm \sqrt{p^2+4q}}{2}$. For de ulike variantene blir egenverdiene hendholdsvis $(1, -3)$, $(-1, -3)$, $(3, -2)$, $(-2, -3)$.

Vi finner egenvektorene ved å løse $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$, i de ulike variantene får vi da hendholdsvis $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$, $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$, $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$, og $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$.

For å skissere fasediagrammet tegner vi kurver som beveger seg innover langs egenvektorer med negativ egenverdi og utover langs de med positiv egenverdi. Over tid bør kurvene bli mer parallelle med den egenvektoren med størst egenverdi. Vi får skisser som ser ut som hendholdsvis







b) Vi har at y er en løsning av $y'' - py' - qy = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$ er en løsning av $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$. Den generelle løsningen av $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ er gitt ved $\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$ der $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er egenvektorene vi fant i a) med egenverdier λ_1 og λ_2.

Den generelle løsningen blir da $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$.

c) Vi begynner med å finne en partikulærløsning. Metode for ubestemte koeffisienter tilsier at vi bør prøve en konstant funskjon $y(t) = A$. Putter vi en slik y inn i difflikningen får vi $-qA = 2$, så $y_p(t) = -\frac{2}{q}$ er en partikulær løsning.

En generell løsning blir da på formen $y(t) = -\frac{2}{q} + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, med $y'(t) = c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}$. For å finne løsningen må vi da bare løse systemet

$$-\frac{2}{q} + c_1 + c_2 = y(0) = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$
$$c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = y'(0) = -\frac{p}{q}$$

Løsningene blir

$$c_2 = -\frac{\lambda_1(p^2+2q)+pq}{q^2(\lambda_2-\lambda_1)} = \frac{1}{\lambda_2^2}$$
$$c_1 = \frac{p^2+2q}{q^2} - c_2 = \frac{1}{\lambda_1^2},$$

så løsningen på initialverdiproblemet blir $y(t) = -\frac{2}{q} + \frac{1}{\lambda_1^2}e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_2^2}e^{\lambda_2 t}$.

Oppgave 5 *Oppgave 7 Eksamen Vår2018*

Anta at s er en vilkårlg reell konstant. Du kan ikke velge en spesifikk verdi.

(a) Finn koeffisienter $p, q \in \mathbb{R}$ slik at andreordens lineære differensialliggningen

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = 0$$

har løsning y_s gitt ved

$$y_s(t) = \cos(s + t).$$

(b) Hva er initialbetingelsene for løsningen y_s ved tiden $t = 0$ (uttrykt ved s)?

(c) Skriv $y_s(t)$ som en lineærkombinasjon av $\cos(t)$ og $\sin(t)$ (med koeffisientene avhengig av s).

Løsningsforslag. (a) Vi finner først

$$y_s' = -\sin(s + t) \text{ og } y_s'' = -\cos(s + t).$$

Ved å sette dette inn i differensialligningen får vi $p = 0$ og $q = 1$, og dermed blir ligningen

$$y'' + y = 0$$

(b) Vi får

$$y_s = \cos(s) \text{ og } y_s'(0) = -\sin(s).$$

(c) Løsningen er $\cos(s + t) = \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t)$. Her kan man enten løse oppgaven ved å bruke trigionometrisk formler, eller bruke den generelle løsningen av differensialligningen

$$y_(t) = A\sin(t) + B\cos(t)$$

og initialbetingelsene fra (b) til å få $A = -\sin(s)$ og $B = \cos(s)$.

Oppgave 6 *Oppgave 8 Eksamen Kont2021*

Vi ser på indreproduktet

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

på rommet $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ av kontinuerlige funksjoner fra $[0, 2\pi]$ til $\mathbb{R}$.

(a) Finn en ortonormal basis for $U = \mathrm{Sp}\{\cos(x), \sin(x)\}$.

Vink: Husk de trigionometriske identitetene:

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin(x)\cos(y) \pm \cos(y)\sin(x)\\ \cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)\\ \cos(2x) &= 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)\end{aligned}$$

(b) Regn ut den ortogonale projeksjonen av $f(x) = x$ ned på U.

(c) Forklar hvorfor $\cos(x + \pi/4)$ er i U, og finn koordinatvektoren til $\cos(x + \pi/4)$ med hensyn på basisen du fant i (a).

Løsningsforslag.

(a) Vi begynner med å regne ut $\langle\sin(x), \cos(x)\rangle$. Ved å bruke u-substitusjonen $u = \sin(x)$, $\mathrm{d}u = \cos(x)\mathrm{d}x$ får vi

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{0} u\mathrm{d}u = 0.$$

Siden de to funskjonene allerede er ortogonale danner de en ortogonal basis. For å få en ortonormal basis trenger vi kun å skalere dem med lengdene deres.

Vi benytter oss av dobbelvinkelformelen

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x),$$

som gir oss $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$ og $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$. Vi benytter dette til å finne lengdene av de to funksjonene:

$$\begin{aligned}
\|\cos(x)\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} 1+\cos(2x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[x+\sin(2x)/2\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\sin(x)\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} 1-\cos(2x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[x-\sin(2x)/2\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Utregningen viser at lengdene er begge $1/\sqrt{2}$. Derfor danner $\mathbf{u}_1 = \sqrt{2}\cos(x)$ og $\mathbf{u}_2 = \sqrt{2}\sin(x)$ en ortonormal basis for U.

(b) Vi beregner projeksjon som

$$\frac{\langle x, \cos(x)\rangle}{\|\cos(x)\|^2}\cos(x) + \frac{\langle x, \sin(x)\rangle}{\|\sin(x)\|^2}\sin(x) = \frac{0}{1/2}\cos(x) + \frac{-1}{1/2}\sin(x) = -2\sin(x).$$

(c) Addisjonsformelen gir

$$\cos(x+\pi/4) = \cos(x)\cos(\pi/4) - \sin(x)\sin(\pi/4).$$

Dette viser at $\cos(x+\pi/4)$ er en lineær kombinasjon av $\cos(x)$ og $\sin(x)$, og

$$\begin{aligned}
\cos(x)\cos(\pi/4) - \sin(x)\sin(\pi/4) =& \frac{\cos(x)}{\sqrt{2}} - \frac{\sin(x)}{\sqrt{2}} \\
=& \frac{1}{2}\mathbf{u}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{u}_2
\end{aligned}$$

skriver det i basis $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ som i (a).

Oppgave 7 *Oppgave 7 Eksamen Vår2016*

Temperaturen i Bymarka i løpet av vintersesongen kan enten være over, lik, eller under 0° Celsius. Trondheims skiklubb observerte de følgende svinginger i temperatur fra den ene dagen til den neste:

- Hvis temperaturen har vært over 0°, er det en 70% sjanse for at den vil være over, og en 10% sjanse for at den vil være under 0° neste dag.
- Hvis temperaturen har vært lik 0°, er det en 10% sjanse for at den vil være over, og en 10% sjanse for at den vil være under 0° neste dag.
- Hvis temperaturen har vært under 0°, er det en 10% sjanse for at den vil være over, og en 70% sjanse for at den vil være under 0° neste dag.

Etter mange dager med dette mønsteret i vinter, for hvilken temperatur bør en skiløper forberede hans/hennes ski? (Gi sannsynlighetene for de tre mulige temperaturene.)

Løsningsforslag

Vi begynner med å sette opp informasjonen i en tabell.

Dagen etter	Dagen før: Over 0°	Lik 0°	Under 0°
Over 0°	70%	10%	10%
Lik 0°	20%	80%	20%
Under 0°	10%	10%	70%

Her har vi brukt at hver kolonne må summeres til 100% for å fylle ut den manglende informasjonen. Dette gir den stokastiske matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Denne matrisen er regulær, så vi vet at den resulterende markov-kjeden konvergerer mot likevektsvektoren. Vi har fått spørsmål om hva temperaturen er etter mange dager, så vi kan anta at kjeden har konvergert, og at svaret vil være gitt ved likevektsvektoren. For å finne likevektsvektoren, finner vi egenrommet til egenverdien $\lambda = 1$.

$$A - 1I = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & -0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & -0.3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Altså er nullrommet utspent av vektoren $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ slik at $x_1 = x_3$ og $x_2 = 2x_3$. Ved å velge $x_3 = 0.25$ får vi likevektsvektoren

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

Det er dermed mest sannsynlig at temperaturen er lik $0°$ med 50% sannsynlighet. Det er 25% sannsynlighet for at temperaturen er over $0°$ og 25% sannsynlighet for at temperaturen er under $0°$.

Oppgave 8 *Oppgave 9 Eksamen Kont2021*

La U være underrommet

$$U = \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

i $\mathbb{R}^3$.

(a) Beskriv underrommet U geometrisk, og finn en lineær ligning som har U som løsningsrom.

(b) Finn en ortonormal basis for U, og finn punktet i U som ligger nærmest punktet

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}.$$

(c) La $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være lineærtransformasjonen gitt ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, der

$$A = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Beskriv geometrisk virkningen av T, og beskriv geometrisk underrommet

$$W = \{T(\mathbf{u}) | \, \mathbf{u} \in U\}.$$

(d) Finn den reelle egenverdien til T, og tilhørende egenrom. Forklar geometrisk hvorfor T ikke kan ha andre reelle egenverdier.

Løsningsforslag.

(a) Underrommet U er planet gitt av ligningen $x = y$. Den oppnås fra planet som er utspent av x–aksen og z–aksen ved å rotere rundt z–aksen med vinkelen $\pi/4$.

(b) En ortonormal basis til U er gitt ved

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\\ 0\end{bmatrix}.$$

Det nærmeste punktet er gitt av den ortogonale projeksjonen, og det kan beregnes som

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2 = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(c) Transformasjonen T er en rotasjon rundt z–aksen med vinkelen $\pi/4$. Bildet av U er gitt av planet som utspennes av y–aksen og z–aksen.

(d) Den tredje standardbasisvektoren $\mathbf{e}_3$ er en egenvektor med egenverdi 1. Siden T beskriver en rotasjon med en vinkel ulik 0 og ulik π, vil $T(\mathbf{u})$ og $\mathbf{u}$ ikke være parallelle, untatt når $\mathbf{u}$ ligger på rotasjonsaksen, og da vil $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. (Merk at hvis $T(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$ for en λ ulik 0, er $T(\mathbf{u})$ og $\mathbf{u}$ parallelle).

Oppgave 9 *Oppgave 4 Eksamen Høst2018*

Se på de tre punktene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^2$.

Finn andregradspolynomet $p(x) = ax^2+bx+c$ som går gjennom alle disse punktene.

Bruk minste kvadrater metode til å finne førstegradspolynomet $q(x) = dx + e$ som passer best til de tre punktene.

Tegn grafene til p og q.

Løsningsforslag Vi finner først andregradspolynomet $p(x) = ax^2 + bx + c$ som passer eksakt til de tre punktene. Da må vi ha

$$p(0) = -1, \quad p(1) = 1 \quad \text{og} \quad p(2) = 7,$$

så vi kan sette opp ligningssystemet

$$\begin{cases} & & c &= & -1 \\ a+ & b+ & c &= & 1 \\ 4a+ & 2b+ & c &= & 7 \end{cases}$$

for koeffisientene i p. Dette systemet har én løsning: $a = 2$, $b = 0$ og $c = -1$. Polynomet blir altså $p(x) = 2x^2 - 1$.

Nå skal vi finne det førsteordens polynomet $q(x) = dx + e$ som passer best til punktene. Hvis $q(x)$ skulle passet eksakt til punktene, ville vi hatt

$$q(0) = -1, \quad q(1) = 1 \quad \text{og} \quad q(2) = 7,$$

som gir følgende ligningssystem for koeffisientene

$$\begin{cases} & e &= & -1 \\ d+ & e &= & 1 \\ 2d+ & e &= & 7 \end{cases}$$

Skrevet på matriseform ser det slik ut:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Vi finner den beste tilnærmingen til en løsning ved å bruke minste kvadraters metode. Hvis vi setter

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}, \quad \text{og } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

vet vi at det er det samme som å finne løsningen på systemet

$$A^T(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0$$

eller tilsvarende, løsningen til

$$(A^T A)\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}.$$

Vi finner

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

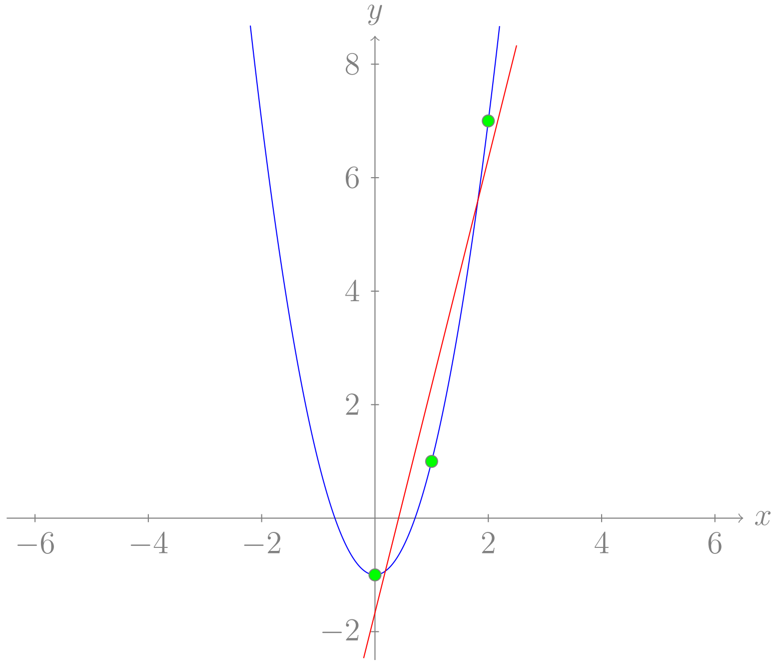
og

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \end{bmatrix},$$

og løser ligningssystemet

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Det har løsning $d = 4$ og $e = -\frac{5}{3}$. Polynomet er altså $q(x) = 4x - \frac{5}{3}$


y
8
6
4
2
−2
x
−6
−4
−2
2
4
6

Oppgave 10 *Oppgave 7 Eksamen Vår2019*

En projeksjonsmatrise M er en matrise slik at $M^2 = M$.

(a) La $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ være funksjonen gitt ved

$$T(\begin{bmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_m \end{bmatrix}^t) = \begin{bmatrix} x_1, & x_2, & 0, & \dots & ,0 \end{bmatrix}^t.$$

der $m \geq 2$. Vis at T er en lineærtransformasjon og finn standardmatrisen $[T]$. Vis at $[T]$ er en projeksjonsmatrise, og finn egenverdiene til $[T]$ for alle $m \geq 2$.

(b) La M være en projeksjonsmatrise som ikke er nullmatrisen eller identitetsmatrisen. Vis at M ikke er inverterbar. Vis at M har egenverdier 0 og 1, og ingen andre egenverdier.

Løsningsforslag:

(a) For å være en lineærtransformasjon, så må $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ oppfylle følgende to krav

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ for alle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}^m$.
2. $T(c\mathbf{u}) = c \cdot T(\mathbf{u})$ for alle vektorer $\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}^m$ og alle skalarer $c \in \mathbb{R}$.

Vi begynner med å sjekke den første egenskapen:

La

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1, & u_2, & \dots, & u_m \end{bmatrix}^t$$

og

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1, & v_2, & \dots, & v_m \end{bmatrix}^t$$

Da har vi

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T(\begin{bmatrix} u_1 + v_1, & u_2 + v_2, & \dots, & u_m + v_m \end{bmatrix}^t) \\
&= \begin{bmatrix} u_1 + v_1, & u_2 + v_2, & 0, & \dots, & 0 \end{bmatrix}^t \\
&= \begin{bmatrix} u_1, & u_2, & 0, & \dots, & u_m \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} v_1, & v_2, & 0, & \dots, & v_m \end{bmatrix}^t \\
&= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

etterfulgt av den andre

$$\begin{aligned} T(c\mathbf{u}) &= T(\begin{bmatrix} cu_1, & cu_2, & \dots, & cu_m \end{bmatrix}^t) \\ &= \begin{bmatrix} cu_1, & cu_2, & 0, & \dots, & 0 \end{bmatrix}^t \\ &= c\begin{bmatrix} u_1, & u_2, & 0, & \dots, & 0 \end{bmatrix}^t \\ &= cT(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

For å finne standardmatrisen, anvender vi T på standardbasisen for $\mathbb{R}^m$.

$$[T] = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e_1}) & T(\mathbf{e_2}) & T(\mathbf{e_3}) & \cdots & T(\mathbf{e_m}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Spesielt er $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ for $m = 2$.

Det at $[T]^2 = [T]$, altså at det er en projeksjonsmatrise, sjekkes direkte ved utregning.

For å finne egenverdiene bruker vi definisjonen $[T]\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

$$[T]\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \\ \vdots \\ \lambda v_m \end{bmatrix} = \lambda\mathbf{v}$$

Dette kan kun være oppfyllt for $\lambda = 1$ (og da med $v_3 = v_4 = \cdots = v_m = 0$), eller for $\lambda = 0$ (og da med $v_1 = v_2 = 0$). For $m = 2$ er $[T]$ identitetsmatrisen, og 1 er eneste egenverdi. For $m > 2$ vil både 1 og 0 være egenverdier.

(b) Vi har antatt at M ikke er identitetsmatrisen. Dersom M er inverterbar, kan vi gange likningen $M^2 = M$ med M^{-1} på begge sider, får vi $M = I$, altså en motsigelse. Da konkluderer vi med at M ikke er inverterbar.

La nå $\mathbf{x}$ være en egenvektor til M, med egenverdi λ. Vi har

$$\lambda\mathbf{x} = M\mathbf{x} = M^2\mathbf{x} = \lambda M\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$$

En egenvektor er per definisjon ulik nullvektoren, så da gir dette at $\lambda = 0$ eller $\lambda = 1$ er de eneste mulige egenverdiene.

Nå gjenstår det å vise at M har begge disse egenverdiene.

Hvis $M\mathbf{v} \neq 0$ for alle vektorer $\mathbf{v} = neq\mathbf{0}$, er M inverterbar. Dette er en motsigelse, så det må finnes $\mathbf{v} \neq 0$ slik at $M\mathbf{v} = 0$. Altså er 0 en egenverdi.

Siden M ikke er nullmatrisen, må minst en kolonne være forskjellig fra 0, og da må det finnes vektorer $\mathbf{v}$ og $\mathbf{y}$ slik at

$$M\mathbf{v} = \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$$

Men i så fall må

$$M\mathbf{y} = M^2\mathbf{v} = M\mathbf{v} = M\mathbf{y}$$

altså er $\mathbf{y}$ en egenvektor med egenverdi 1. Det betyr at også 1 er en egenverdi.

Oppgave 11 *Oppgave 4 Eksamen Vår2017*

I denne oppgaven lar vi $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ og $\mathbf{b}$ være de følgende vektorene i $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix}1\\4\\1\\2\end{bmatrix} \quad \mathbf{a_2} = \begin{bmatrix}2\\13\\1\\9\end{bmatrix} \quad \mathbf{a_3} = \begin{bmatrix}9\\31\\5\\29\end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}4\\-17\\14\\13\end{bmatrix}$$

(a) Vis at vektoren $\mathbf{b}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ og $\mathbf{a_3}$.

(b) La $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ være en lineærtransformasjon slik at

$$T(\mathbf{a_1}) = \begin{bmatrix}8\\0\end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{a_2}) = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T(\mathbf{a_3}) = \begin{bmatrix}-5\\5\end{bmatrix}$$

Finn $T(\mathbf{b})$.

Løsningsforslag

(a) For å vise at $\mathbf{b}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ og $\mathbf{a_3}$, må vi finne reelle tall c_1, c_2 og c_3 slik at $c_1\mathbf{a_1} + c_2\mathbf{a_2} + c_3\mathbf{a_3} = \mathbf{b}$. Dette gjør vi ved å løse matriseligningen

$$[\mathbf{a_1} \mid \mathbf{a_2} \mid \mathbf{a_3}] \begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3 & 9\\4 & 13 & 31\\1 & 1 & 5\\2 & 9 & 29\end{bmatrix} \begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\-17\\14\\13\end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

Vi radreduserer den utvidede matrisen til systemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 9 & 4\\4 & 13 & 31 & -17\\1 & 1 & 5 & 14\\2 & 9 & 29 & 13\end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 9 & 4\\0 & 1 & -5 & -33\\0 & -2 & -4 & 10\\0 & 3 & 11 & 5\end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 9 & 4\\0 & 1 & -5 & -33\\0 & 0 & -14 & -56\\0 & 0 & 26 & 104\end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 9 & 4\\0 & 1 & -5 & -33\\0 & 0 & -14 & -56\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 7\\0 & 1 & 0 & -13\\0 & 0 & 1 & 4\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Altså $c_1 = 7$, $c_2 = -13$ og $c_3 = 4$, og dermed

$$\mathbf{b} = 7\mathbf{a_1} - 13\mathbf{a_2} + 4\mathbf{a_3}$$

(b) Vi vet at T er en lineærtransformasjon, så da kan bruke lineariteten til å få

$$\begin{aligned} T(\mathbf{b}) = T(7\mathbf{a_1} - 13\mathbf{a_2} + 4\mathbf{a_3}) &= 7T(\mathbf{a_1}) - 13T(\mathbf{a_2}) + 4T(\mathbf{a_3}) \\ &= 7\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} - 13\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix}} \end{aligned}$$